Algebra II
II appello - 13 febbraio 2018
A.A. 2017/2018

1 - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{ (a, b, c) \mid a, b, c \in F\}$. Con $h, k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (0, 1, 4)$, $v_2 = (5, 8, 2)$, $v_3 = (6, 3, h)$, $v_4 = (k, 9, 6)$, $v_5 = (10, 5, 4)$, ed i sottospazi $W = < v_1, v_2, v_3 >$ e $V = < v_4, v_5 >$ di F^3.

(I) In funzione di h, k e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;

- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;

- si individui l'unico caso in cui $dim\,(W \cap V) = 0$;

- si precisi in ogni caso $dim\,(W \cap V)$.

(II) Posto $U = < v_2, v_3, v_5 > = < (5, 8, 2), (6, 3, h), (10, 5, 4) >$, si descrivano gli elementi di U e:

- si determini, in funzione di h e della caratteristica di F, la dimensione di U;

- si verifichi quando la posizione $\psi(\ (a, b, c) + U\ ) = 2a - b - c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F ed in tal caso si provi che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali; se ne discutano poi eventuali suriettività e iniettività. In caso di applicazione non iniettiva, si individuino elementi distinti del dominio con uguale immagine.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = (x^3 - 23)(x^2 + x + 1) \in B[x] .$$

Distinguendo i casi: $B = \mathbf{Q}$, $B = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{Z}_2$, $B = \mathbf{Z}_3$, $B = \mathbf{Z}_5$,

(***i***) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $B[x]$;

(***ii***) si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a B, precisandone la cardinalità, il grado $|E : B|$ e una B-base;

(***iii***) si individui una decomposizione in fattori di primo grado di $f(x)$ in $E[x]$;

(***iv***) si determinino un campo di spezzamento K di $g(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \mathbf{Z}_5[x]$ su $\mathbf{Z}_5$ ed un campo di spezzamento L di $f(x)g(x) \in \mathbf{Z}_5[x]$ su $\mathbf{Z}_5$.